

科目：工程數學 適用：土木系三

編號：811

考生注意：

1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
3. 限用藍、黑色筆作答；試題須隨卷繳回。

本 試 題
共 1 頁
第 1 頁

1. 解下列一階微分方程式。(10%)

$$(x+y^2)dy+(y-x^2)dx=0$$

2. 求下列微分方程式之一般解。(10%)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=e^{-t}\cos 2t$$

3. 求下列微分方程式之解。(10%)

$$y'+y=2t, y(0)=1, y'(0)=1$$

4. 若矩陣 A 為

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) 試求其特徵值(eigenvalue)。(5%) (b) 求其特徵向量(eigenvector)。(5%)
(c) 求可將矩陣 A 對角化之矩陣 P，並計算矩陣 A 對角化後之結果。(5%)
5. 試求曲面 $S: z=y^2+x^2$ 於點 P (1,-1,2) 之切面方程式與單位法向量。(10%)
6. 試求下列面積分 I 之值，其中

$$I=\iint_S x^3 dydz+x^2 y dzdx+x^2 z dxdy$$

S 為圓柱體之表面，其包含：① $x^2+y^2=4$ ($0\leq z\leq 3$)

② $z=0, (x^2+y^2\leq 4)$ ③ $z=3, (x^2+y^2\leq 4)$ 此三部分。(15%)

7. 若
- $\vec{v}=xyz(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$
- 且
- $f(x,y,z)=xyz$
- ，試計算下列各式之值：

(a) $\nabla\times\vec{v}$ 。(5%) (b) $\nabla\cdot\vec{v}$ 。(5%) (c) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})$ 。(5%) (d) $\nabla\times(\nabla f)$ 。(5%)

8. 若
- $g(x)=x^3-x^2+2x+1$
- ，試求一函數
- $f(x)=ax+b$
- (a, b 皆為常數)，使得

$S(a,b)=\int_0^1 [g(x)-f(x)]^2 dx$ 之值為最小。(10%)