國立暨南國際大學九十二學年度碩士班研究生入學考試試題

第 3 節微積分 適用:(國企所一般生 313)　　(本試題共 1 頁，第 1 頁)

考生注意: 1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分，並限以藍黑色筆作答。
3. 試題隨卷繳回。(餘請詳閱試場規則)

1. 敘述並證明微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus)。 (10%)

2. 請利用泰勒展式估計 $\sqrt{1.02e^{0.02}}$ 的近似值至小數點後第四位。(其中 e 爲自然基底。)　(10%)

3. 請將連續函數 $y = f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} + 1$ 的圖形畫在平面直角坐標上，此圖必須標明相對極值與反曲點(inflection point)的位置。　(10%)

4. 已知 $f(x) = (m_1(x) + m_2(x))^{m_1(x)}$，其中 $m_1(x) = \sin(x) + x\cos(x) + 2$，$m_2(x) = x^2 + x - 1$，且 $y = g(u) = \dfrac{1}{f(u^2 + 2u + 1)}$，求 $\left.\dfrac{dy}{du}\right|_{u=0} = ?$　(10%)

5. 求下列積分值。($f(x) = \ln(x)$ 爲以自然基底 e 之對數函數。)

(5.a) $\int_0^1 (x-1)\ln(x^2+2x+1)dx = ?$　(5%)

(5.b) $\int_0^1\int_0^1 (xy + 3x^2 + e^{x+y})dxdy = ?$　(5%)

(5.c) 若 $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4 且 1 > x > 0, y > 0\}$ 求 $\iint_R x dA = ?$　(10%)

6. 已知數列 $a_k = \dfrac{1}{(k+1)!+k}$，$b_k = (-1)^k$，$c_k = \ln(2k+1)$，$k = 1,2,3,\dots$。
判斷下列級數是否收斂。(請說明理由，每小題佔 3%)

(6.a) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$　(6.b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot c_k$　(6.c) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_k}$　(6.d) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{b_k}{c_k}$　(6.e) $\sum_{k=1}^{\infty} (\dfrac{1}{c_k})^k$

7. 試給出一個描述無窮大或無窮多的定義。(5%)

8. 已知曲面 (x,y,z) 滿足 $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$，請回答下列問題:

(8.a) 計算偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = ?$　(5%)

(8.b) 計算偏微分 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = ?$　(5%)

(8.c) 請找出此曲面之相對極值與鞍點(saddle point)。　(10%)