

科目：322 管理數學

系組：國企系乙組

(本試題共 2 頁，第 / 頁)

考生注意：1. 依次序作答，只要標明題號，不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上，否則不予計分。
3. 試題隨卷繳回。

注意：

- (i) 題目分為三部份，分別為微積分、機率與矩陣計算。
(ii) 每一題皆為計算題，請寫下計算過程。

I. 微積分 (共 35 分)

1. 若 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.718 \dots$ ，請回答下列問題：

(1.a) 請證明 $f(x) = e^x$ 的導數仍然為 e^x ， $\frac{df(x)}{dx} = e^x$ 。 (10 分)

(1.b) 利用 (1.a) 的結果計算 $\int_0^1 x e^x dx = ?$ (5 分)

(1.c) 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n-1}{2n+2})^n = ?$ (請用 e 表達極限值) (5 分)

(1.d) 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n-1}{2n+2})^n = ?$ (5 分)

2. 請敘述並證明微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) (若只敘述而無證明會部份給分) (10 分)

II. 機率 (共 25 分)

3. (3.a) 請敘述中央極限定理 (Central Limit Theorem)。 (5 分)

(3.b) 利用中央極限定理求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\frac{n-\sqrt{n}}{2}} C_i^n (\frac{1}{2})^n = ?$ (10 分)

(已知 $C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-i+1)}{i(i-1)(i-2) \dots 1}$ ， $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.025$)

4. 已知一批產品由甲、乙、丙三名工人生產，三人的產量分別佔總產量的 30%、30%、40%。若已知三人的不良率分別為各自產量的 2%、3%、5%，現任意抽取一個樣本做檢驗，請回答下列問題。

(4.a) 求此樣本為瑕疵品的機率。 (5 分)

(4.b) 若已知此樣本為瑕疵品且不為甲所生產，則此樣本由丙生產的機率為多少？ (5 分)

科目: 322 管理數學

系組: 國企系乙組

考生注意: 1. 依次序作答, 只要標明題號, 不必抄題。
2. 答案必須寫在答案卷上, 否則不予計分。
3. 試題隨卷繳回。

III. 矩陣計算 (共 40 分)

5. 若 A, B 為兩個 $a \times a$ 矩陣, 請判斷下列敘述是否為真, 若為否, 請舉一反例說明。

(10 分)

(5.a) $A + B = B + A$

(5.b) $A \cdot B = B \cdot A$

(5.c) $|A \cdot B| = |B \cdot A| = |A||B|$

(5.d) $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$

(5.e) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

(其中 $|A|$ 表示 A 的行列式值, A^{-1} 為 A 的反矩陣, $\text{tr}(A)$ 為 A 的對角元素和。)6. 已知 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 請回答下列問題:(6.a) 求 M 的特徵值 (eigenvalues)。

(5 分)

(6.b) 請將 M 對角化。

(5 分)

(6.c) 若 $H = M^{20} = M \cdot M \cdots M$, 求 H 的行列式值, $|H| = ?$

(5 分)

(6.d) 求 $\text{tr}(M^{-10})$, (M^{-10} 為 M^{10} 的反矩陣)

(5 分)

7. 令 $M = \begin{bmatrix} I_a & \alpha \\ \beta & I_b \end{bmatrix}$, 其中 I_a 為 $a \times a$ 的單位矩陣 (Identity matrix), α 與 β 分別為 $a \times b$ 與 $b \times a$ 矩陣, 試證 $|M| = |I_a - \alpha\beta^T|$ (其中 β^T 為 β 的轉置矩陣) (10 分)